

II - Nizovi - ispitivanje konvergencije

Bitni pojmovi. Osnovne teoreme o konvergentnim nizovima, nula-niz, metodi za ispitivanje konvergencije nizova, Stoltzov stav, neke važnije granične vrednosti, broj e , Cauchyev niz.

13. Ako važi

$$2 < a_1 < 3, \quad 5a_{n+1} = a_n^2 + 6,$$

dokazati da je niz konverentan, a zatim odrediti njegovu graničnu vrednost.

14. Odrediti $\inf a_n$, $\sup a_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ i $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$, za niz sa opštim članom

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1 + (-1)^n}{2}.$$

15. Odrediti $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{1}\right) \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 \cdots \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$.

16. Odrediti $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

17. Primenom Stoltzovog stava odrediti $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{d^n}$ za $d > 0$ i $d \neq 1$.

18. Primenom Stoltzovog stava odrediti $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}}$ za $p \geq -1$.

19. (ispit MATEMATIKA I - 19.03.2004.) Bez nalaženja granične vrednosti dokazati konvergenciju niza sa opštim članom

$$a_n = \frac{\arctan \frac{1}{1}}{1 \cdot 2} + \frac{\arctan \frac{1}{2}}{2 \cdot 3} + \frac{\arctan \frac{1}{3}}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{\arctan \frac{1}{n}}{n \cdot (n+1)}.$$

20. Izračunati $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - 2n + 1}{n^2 - 4n + 2} \right)^n$.

21. Izračunati $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!} \right)$.

22. Odrediti parametar α tako da niz

$$a_n = \frac{3^n + (-2)^n}{3^{n+1} + (-2)^{n+1}} + \left(\frac{n+1}{n-1} \right)^n + (1-\alpha) \cdot \sin \frac{n\pi}{2},$$

konvergira.

23. Dat je rekurentni niz $s_0 = 3$, $s_1 = 2$, $s_n = \frac{3}{2}s_{n-1} - \frac{1}{2}s_{n-2}$. Odrediti njegov opšti član, ispitati konvergenciju i ukoliko je konverentan, odrediti njegovu graničnu vrednost.

24. Dat je rekurentni niz $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0$. Odrediti njegov opšti član.

25. Dat je rekurentni niz $a_0 = 2$, $a_1 = -1$, $a_2 = 3$, $a_{n+3} + a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0$. Odrediti njegov opšti član.

Domaći zadatak II

DZ8. (ispit MATEMATIKA I - 22.11.2003.) Ako važi

$$1 < a_1 < 3, \quad 4a_{n+1} = a_n^2 + 3,$$

dokazati da je niz konvergentan, a zatim odrediti njegovu graničnu vrednost.

DZ9. Nizovi (a_n) i (b_n) su dati pomoću

$$a_1 > 0, \quad b_1 > 0, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_n = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}.$$

Dokazati:

- 1) $a_n > b_n > 0$, $n = 1, 2, \dots$
- 2) a_n je monotono opadajući a b_n je monotono rastući niz,
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \sqrt{a_1 b_1}$.

DZ10. Odrediti $\inf a_n$, $\sup a_n$, $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ i $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$, za niz sa opštim članom

$$a_n = 1 - \frac{1}{n}.$$

DZ11. (ispit MATEMATIKA I - 12.01.2001.) Ispitati konvergenciju, a zatim ukoliko postoji i odrediti graničnu vrednost niza datog pomoću

$$x_0 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{x_n}{1 + x_n^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

DZ12. (ispit MATEMATIKA I - 22.12.2001.) Dat je niz sa opštim članom $a_n = \frac{n}{n+13}$. Koristeći definiciju granične vrednosti niza, dokazati da je granična vrednost ovog niza 1. Zatim odrediti koliko se članova datog niza nalazi izvan intervala $(0.99, 1.01)$.

DZ13. (ispit MATEMATIKA I - 08.04.2002.) Neka je $x_n \neq 1$, $n \in \mathbb{N}$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$. Naći

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n + x_n^2 + x_n^3 + \dots + x_n^k - k}{x_n - 1}, \quad (k \in \mathbb{N}).$$

DZ14. (ispit MATEMATICKA ANALIZA - 21.11.2005.) Izračunati

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^n}{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^n}}, \quad |a| < 1.$$

DZ15. (ispit MATEMATICKA ANALIZA - 17.12.2005.) Dokazati konvergenciju i odrediti graničnu vrednost niza datog pomoću

$$a_1 > 0, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{9}{a_n} \right) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

DZ16. Dat je rekurentni niz $a_0 = A$, $a_1 = B$, $a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{1}{2}a_{n-2}$. Odrediti njegov opšti član.

DZ17. Odrediti opšti član konvergenciju Fibonachievog niza 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

DZ18. Dat je rekurentni niz $a_0 = 1$, $a_1 = 4$, $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0$. Odrediti njegov opšti član.

DZ19. Dat je rekurentni niz $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_{n+3} - 4a_{n+2} + a_{n+1} + 6a_n = 0$. Odrediti njegov opšti član.

DZ20. Dat je rekurentni niz $a_0 = 3$, $a_1 = 2$, $a_{n+2} - 6a_{n+1} + 8a_n = 0$. Odrediti njegov opšti član.