

I - Metrički prostori. Nizovi.

Bitni pojmovi. *Metrika (rastojanje), metrički prostor, neke važne nejednakosti.*

1. Neka su $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ i $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ elementi n -dimenzionalnog Euklidskog prostora E^n . Neka je zadato preslikavanje

$$d(x, y) = \sum_{k=1}^n |x_k - y_k|.$$

Dokazati da je ovo preslikavanje jedna metrika u skupu E^n .

2. U nepraznom skupu X dato je preslikavanje

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \neq y. \end{cases}$$

Dokazati da je ovo preslikavanje metrika.

3. Neka je u skupu X data metrika $d(x, y)$. Dokazati da je i preslikavanje $h(x, y) = \pi \cdot d(x, y)$, takođe jedna metrika.

Bitni pojmovi. *Realan niz, opšti član niza, indeks opšteg člana, granična vrednost niza, konvergencija, divergencija, zbir, razlika, proizvod i količnik konvergentnih nizova.*

4. Izračunati $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n - 1}{5n + 1}$.

5. Izračunati $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 1}{4n^2 - n + 2}$.

6. Izračunati $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 5n + 2007}{5n + 7}$.

7. Dokazati po definiciji da je $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n - 1}{5n + 1} = \frac{3}{5}$.

8. (02.06.2006.) Koristeći definiciju granične vrednosti niza dokazati $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n + 1} = 1$. Koliko se članova ovog niza nalazi izvan intervala $(1 - 10^{-4}, 1 + 10^{-4})$?

9. Odrediti graničnu vrednost $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n \cdot (n + 1)}{n^3}$.

10. Odrediti graničnu vrednost $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \dots \sqrt[2^n]{2} \right)$.

11. Odrediti graničnu vrednost $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-3)^n + 5^n}{(-3)^{n+1} + 5^{n+1}}$.

12. Odrediti graničnu vrednost $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n - \sqrt{n}} \right)$.

Domaći zadatak I

DZ1. Dokazati da je u skupu \mathbb{R} preslikavanje $d(x, y) = |x - y|$ jedna metrika.

DZ2. Dokazati da je u skupu \mathbb{R}^3 preslikavanje $d(x, y) = \sum_{k=1}^3 |x_k - y_k|$ jedna metrika.

DZ3. Dokazati da je u skupu \mathbb{R}^3 preslikavanje $d(x, y) = \max_{1 \leq i \leq 3} |x_i - y_i|$ jedna metrika.

DZ4. Na skupu \mathbb{N} dato je preslikavanje

$$d(m, n) = \begin{cases} 0, & m = n \\ 1 + \frac{1}{m+n}, & m \neq n. \end{cases}$$

Ispitati da li je ovo preslikavanje metrika.

DZ5. Ako se zna da je $d(x, y)$ metrika na skupu E^n , dokazati da je i preslikavanje $h(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$, jedna metrika na istom skupu.

DZ6. Dokazati po definiciji da je $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 3}{3n^2 - 4} = \frac{2}{3}$.

DZ7. Odrediti graničnu vrednost $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2} \right)$.