

VI - Linearni prostor, Normirani prostor, Unitarni prostor

Bitni pojmovi. *Linearni prostor, linearna zavisnost i nezavisnost vektora, lineal, algebarska baza, dimenzija, primeri nekih linearnih prostora (\mathbb{R}^3 , \mathbb{R}^n , \mathcal{P}_2 , \mathcal{P}_n), normirani prostor, norma vektora, skalarni proizvod, unitarni prostor, ortogonalnost, konstrukcija ortogonalne baze, Gramm-Schmidtov postupak.*

44. Pokazati da vektori $e_1 = (1, 1, 1)$, $e_2 = (1, 1, 2)$ i $e_3 = (1, 2, 3)$ čine jednu bazu u prostoru \mathbb{R}^3 . Zatim, naći koordinate vektora $x = (6, 9, 14)$ u toj bazi. Koja je dimenzija ovog prostora?
45. Pokazati da polinomi 1 , $1 + t$ i $1 + t + t^2$ čine jednu bazu u prostoru \mathcal{P}_2 . Zatim izraziti polinom $p(t) = 2 + 3t - t^2$ preko elemenata te baze. Koja je dimenzija ovog prostora?
46. Pokazati da nizovi $e_1 = (1, 1, \dots, 1, \dots)$ i $e_2 = (0, 1, 2, \dots, n, \dots)$ čine jednu bazu u prostoru \mathcal{X} , svih beskonačnih aritmetičkih nizova realnih brojeva. Zatim izraziti beskonačni aritmetički niz $n = (1, 4, 7, \dots, 3k + 1, \dots)$ preko elemenata ove baze. Koja je dimenzija ovog prostora?
47. Ispitati ortogonanost skupa vektora $\{(1, 1, -1, -1), (1, -1, 1, -1), (0, 1, 1, 0), (1, 0, 0, 1)\}$. Ako je ortogonalan, ortonormirati ga.
48. Dati su vektori $v_1 = (2, 0, 1)$, $v_2 = (4, 1, -3)$, $v_3 = (-1, 2, 2)$. Ispitati ortogonalnost skupa $\{v_1, v_2, v_3\}$. Primenom Gramm-Schmidtovog postupka, formirati na osnovu njega ortogonalan skup vektora $\{u_1, u_2, u_3\}$. Zatim, dobijeni skup, ortonormirati.
49. (ispit - 18.04.2005.) Neka su data dva vektora $u_1 = (1, -1, 1, -1)$ i $u_2 = (1, 1, 1, 1)$ u prostoru \mathbb{R}^4 . Dopuniti ovaj skup do ortogonalne baze, a zatim normirati dobijenu bazu.

Domaći zadatak VI

- DZ40.** (ispit - 02.02.2006.) Dati su vektori $e_1 = (2, 1, -3)$, $e_2 = (3, 2, -5)$ i $e_3 = (1, -1, 1)$. Dokazati da oni čine jednu bazu u prostoru \mathbb{R}^3 . Odrediti koordinate vektora $x = (6, 2, -7)$ u toj bazi.
- DZ41.** Pokazati da vektori $e_1 = (1, 1, 1, 1)$, $e_2 = (1, 1, 1, 2)$, $e_3 = (1, 1, 2, 3)$ i $e_4 = (1, 2, 3, 4)$ čine jednu bazu u prostoru \mathbb{R}^4 . Zatim, naći koordinate vektora $x = (3, 6, 11, -2)$ u toj bazi. Koja je dimenzija ovog prostora?
- DZ42.** Pokazati da polinomi 1 , $1 - t$, $2 - 2t + t^2$ i $1 + t + t^2 + t^3$ čine jednu bazu u prostoru \mathcal{P}_3 . Zatim izraziti polinom $p(t) = 2 + 3t - t^2 + 2t^3$ preko elemenata te baze. Koja je dimenzija ovog prostora?
- DZ43.** Ispitati algebarsku strukturu $(\mathbb{R}^3, +)$.
- DZ44.** Ispitati algebarsku strukturu $(\mathcal{P}_3, +)$.
- DZ45.** Ispitati algebarsku strukturu $(\mathcal{X}, +)$.
- DZ46.** Dokazati da je skup \mathcal{X} , svih beskonačnih aritmetičkih nizova realnih brojeva linearan prostor. Pokazati da nizovi $e_1 = (1, 1, \dots, 1, \dots)$ i $e_2 = (0, 1, 2, \dots, n, \dots)$ čine jednu bazu u tom prostoru.
- DZ47.** (ispit - 04.02.2005.) Gramm-Schmidtovim postupkom ortogonalizacije naći ortonormiranu bazu koristeći bazu $u_1 = (2, 0, 2)$, $u_2 = (1, 2, 1)$, $u_3 = (0, 1, 2)$.
- DZ48.** (ispit - 26.09.2006.) Koristeći Gramm-Schmidtov postupak ortogonalizacije i skup linearno nezavisnih vektora $a = (1, 1, 1)$, $b = (1, 2, 3)$ i $c = (1, 1, 2)$, naći jednu ortonormiranu bazu.
- DZ49.** (ispit - 02.02.2006.) Koristeći Gramm-Schmidtov postupak ortogonalizacije i skup linearno nezavisnih vektora $a = (1, 1, 1)$, $b = (3, -1, -1)$ i $c = (-2, 0, 6)$, naći jednu ortonormiranu bazu.
- DZ50.** (ispit - 17.12.2005.) Dopuniti do ortogonalne baze prostora \mathbb{R}^4 sistem sastavljen od vektora $u_1 = (1, 1, 1, 1)$ i $u_2 = (-13, 5, 6, 2)$, a zatim naći odgovarajuću ortonormiranu bazu.
- DZ51.** (ispit - 26.11.2005.) Naći vektor koji dopunjuje skup vektora $\{(2, 1, 2), (1, 2, -2)\}$ do ortogonalne baze, a zatim naći ortonormiranu bazu.