

**III - Podgrupe. Morfizmi.  
Algebarske strukture sa dve operacije.**

**Bitni pojmovi.** Podgrupa, Homomorfizam, Izomorfizam, Distributivnost, Algebarske strukture sa dve operacije (Prsten, Telo, Polje).

17. Data je grupa  $(G, \circ)$  i jedan njen element  $a \in G$ . Dokazati da je skup elemenata iz  $G$ , koji su komutativni sa  $a$  podgrupa grupe  $G$ .
18. Date su grupe  $(\mathbb{Z}, +)$  i  $(G, \circ)$ , gde je  $\mathbb{Z}$  skup celih brojeva, a  $G = \{-1, 1\}$ . Dato je i preslikavanje  $f: \mathbb{Z} \mapsto G$ , tako da je  $f(2n) = 1$  i  $f(2n + 1) = -1$ , za  $n \in \mathbb{Z}$ . Dokazati da je preslikavanje  $f$  homomorfizam.
19. Ispitati strukturu  $(E, \oplus, \odot)$ , gde je  $E = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ , a

$$(a_1, b_1) \oplus (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2),$$
$$(a_1, b_1) \odot (a_2, b_2) = (a_1 a_2, a_1 b_2 + b_1 a_2 + b_1 b_2).$$

**Literatura:** G. V. Milovanović, R. Ž. Đorđević: *Linearna Algebra*, Elek. fakultet, Niš (2005).

**Domaći zadatak III**

**DZ15.** Dokazati da su grupe  $(\mathbb{R}^+, \cdot)$  i  $(\mathbb{R}, +)$  izomorfne.

**DZ16.** Ispitati strukturu  $(\mathbb{R}^4, \oplus, *)$ , gde je  $\mathbb{R}^4 = \{(a, b, c, d) \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ , a

$$(a_1, b_1, c_1, d_1) \oplus (a_2, b_2, c_2, d_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2),$$
$$(a_1, b_1, c_1, d_1) * (a_2, b_2, c_2, d_2) = (a_1 a_2 + b_1 c_2, a_1 b_2 + b_1 d_2, c_1 a_2 + d_1 c_2, c_1 b_2 + d_1 d_2).$$

**DZ17.** Ispitati strukturu  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ .

**DZ18.** Neka je  $S = \{a\}$ . Ispitati strukturu  $(S, +, \cdot)$ , ako je  $a + a = a$  i  $a \cdot a = a$ .

**DZ19.** Dokazati izomorfnost struktura  $(S, +)$  i  $(S, \cdot)$  iz prethodnog zadatka.

**DZ20.** (24.11.2004.) Neka je  $(G, *)$  grupa i neka je  $g \in G$  jedan njen element. Na skupu  $G$  definišimo operaciju

$$a \cdot b = b * g * a, \quad \forall a, b \in G.$$

Ispitati strukturu  $(G, \cdot)$ .

**DZ21.** (18.03.2005.) Ispitati strukturu  $(S, +, \cdot)$ , pri čemu je  $S = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ .

**DZ22.** Ispitati strukturu  $(\mathbb{R}, \odot)$ , gde je  $a \odot b = a + b + ab$ .