**Predmet: Linearna Algebra**
**Asistent: Branislav M. Randjelović** **Datum: 16. novembar 2006.**

# VI - Linearni operatori

**Bitni pojmovi.** *Operator, homogenost, aditivnost, linearnost, matrica linearnog operatora.*

**50.** (ispit - 30.09.2005.) Dat je linearan operator $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}|mapsto\mathcal{P}_2$ pomoću

$$\mathcal{A}(x,y,z) = (x+y) + (x-2y)t + (3x+y+2z)t^2.$$

Date su i baze

$$B_{\mathbb{R}^3} = \{(-1,1,1),(0,2,1),(1,3,2)\}, \quad B_{\mathcal{P}_2} = \{1, 1+t, 2-t+3t^2\}.$$

Naći matricu operatora $\mathcal{A}$ u odnosu na date baze.

**51.** Neka je u prostoru polinoma stepena ne višeg od dva dat sistem vektora $B = \{(1+t)^2, 1+t, 1\}$ i neka je dat operator $\mathcal{A}\colon \mathcal{P}_2 \mapsto \mathcal{P}_2, \quad (at^2+bt+c) = ct^2+bt+a$. Dokazati da ovaj sistem predstavlja jednu bazu u ovom prostoru, a zatim odrediti matricu datog operatora koristeći datu bazu.

**52.** U prostoru matrica

$$\mathcal{M}_{2,2} = \left\{ M \mid M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \ a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\},$$

deluje operator $\tau\colon \mathcal{M}_{2,2} \mapsto \mathcal{M}_{2,2}, \quad \tau(M) = M^T$ (operator transponovanja). Odrediti matricu ovog operatora u prirodnoj bazi za ovaj prostor

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

**53.** U prostoru prosto-periodičnih oscilacija

$$\mathcal{X}_\omega = \{u(t) | u(t) = A\cos(\omega t + \varphi), \ A \geq 0, \ -\pi < \varphi \leq \pi\}$$

deluje operator $\mathcal{G}\colon \Xi_\omega \mapsto \mathcal{X}_\omega$, na način $\mathcal{G}(u(t)) = \sqrt{3}A\cos(\omega t + \varphi - \pi/6)$. Odrediti matricu ovog operatora u prirodnoj bazi za ovaj prostor $B = \{\cos\omega t, \sin\omega t\}$.

**54.** (ispit - 22.12.2001.) U prostoru beskonačnih aritmetičkih nizova deluje operator $\mathcal{B}\colon \mathcal{X} \mapsto \mathcal{X}$, na način

$$\mathcal{X}(a, a+d, a+2d, \ldots, a+nd, \ldots) = (-a, -a-2d, -a-4d, \ldots, -a-2nd, \ldots).$$

Odrediti matricu ovog operatora u $B = \{(1,1,1,\ldots,1,\ldots),(0,1,2,\ldots,n,\ldots)\}$.

**55.** (ispit - 26.12.2003.) Linearan operator $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ preslikava vektore $\{(2,3,5),(0,1,2),(1,0,0)\}$ redom u vektore skupa $\{(1,1,1),(1,1,-1),(2,1,2)\}$. Odrediti matricu ovog operatora u bazi u kojoj su dati svi ovi vektori (tj. u prirodnoj bazi).

## Domaći zadatak VII

**DZ52.** Odrediti matricu operatora iz 50. zadataka, koristeći datu bazu u $\mathbb{R}^3$, a prirodnu bazu u $\mathcal{P}_2$.

**DZ53.** Odrediti matricu operatora iz 50. zadataka, koristeći prirodnu bazu u $\mathbb{R}^3$, a datu bazu u $\mathcal{P}_2$.

**DZ54.** Odrediti matricu operatora iz 50. zadataka, koristeći prirodnu bazu i u $\mathbb{R}^3$, i u $\mathcal{P}_2$.

**DZ55.** Odrediti matricu operatora iz 51. zadataka, koristeći prirodnu bazu $\{t^2, t, 1\}$.

**DZ56.** U prostoru prosto-periodičnih oscilacija deluje operator $\mathcal{G}\colon \Xi_\omega \mapsto \mathcal{X}_\omega$, na način $\mathcal{G}(u(t)) = \frac{A}{2}\sin(\omega t + \varphi)$. Odrediti matricu ovog operatora u prirodnoj bazi za ovaj prostor $B = \{\cos\omega t, \sin\omega t\}$.

**DZ57.** U prostoru prosto-periodičnih oscilacija deluje operator $\mathcal{G}\colon \Xi_\omega \mapsto \mathcal{X}_\omega$, na način $\mathcal{G}(u(t)) = \frac{A}{3}\sin(\omega t + \varphi + \pi/3)$. Odrediti matricu ovog operatora u prirodnoj bazi za ovaj prostor $B = \{\cos\omega t, \sin\omega t\}$.

**DZ58.** (ispit - 12.01.2001.) Dokazati daje operator $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$, gde je $\mathcal{A}(x,y,z) = (z,y,x)$ linearan. Zatim naći njegovu matricu u bazi $\{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$.

**DZ59.** (ispit - 13.01.2001.) U prostoru $\mathcal{P}_3$ dat je operatora $\mathcal{B}\colon \mathcal{P}_3 \mapsto \mathcal{P}_3$, za koji važi

$$\mathcal{B}(t^3+t^2) = t^3+t,\quad \mathcal{B}(t^3+t) = t^3+1,\quad \mathcal{B}(t^3+1) = t^3+t^2+t+1,\quad \mathcal{B}(t^3+t^2+t+1) = 0.$$

Nači njegovu matricu u prirodnoj bazi $\{1, t, t^2, t^3\}$.

**DZ60.** (ispit - 19.05.2006.) Neka je $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^4 \mapsto \mathcal{M}_2$ ($\mathcal{M}_2$ skup svih kvadratnih matrica reda dva), operator zadat sa

$$\mathcal{A}(x,y,z,w) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x-w & y+z \\ x+w & y-z \end{bmatrix}.$$

Dokazati da je operator linearan, a zatim odrediti matricu operatora $\mathcal{A}$ u odnou na baze

$$B_{\mathbb{R}^4} = \{(1,0,0,-1),\ (0,1,1,0),\ (1,0,0,1),\ (0,1,-1,0)\},$$

i

$$B_{\mathcal{M}_2} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$