Predmet: Linearna Algebra
Asistent: Branislav M. Randjelović **Datum: 09. novembar 2006.**

VI - Linearni prostor, Normirani prostor, Unitarni prostor

Bitni pojmovi. *Linearni prostor, linearna zavisnost i nezavisnost vektora, lineal, algebarska baza, dimenzija, primeri nekih linearnih prostora ($\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_n$), normirani prostor, norma vektora, skalarni proizvod, unitarni prostor, ortogonalnost, konstrukcija ortogonalne baze, Gramm-Schmidtov postupak.*

44. Pokazati da vektori $e_1 = (1,1,1)$, $e_2 = (1,1,2)$ i $e_3 = (1,2,3)$ čine jednu bazu u prostoru $\mathbb{R}^3$. Zatim, naći koordinate vektora $x = (6,9,14)$ u toj bazi. Koja je dimenzija ovog prostora?

45. Pokazati da polinomi 1, $1+t$ i $1+t+t^2$ čine jednu bazu u prostoru $\mathcal{P}_2$. Zatim izraziti polinom $p(t) = 2+3t-t^2$ preko elemenata te baze. Koja je dimenzija ovog prostora?

46. Pokazati da nizovi $e_1 = (1,1,...,1,...)$ i $e_2 = (0,1,2,...,n,...)$ čine jednu bazu u prostoru $\mathcal{X}$, svih beskonačnih aritmetičkih nizova realnih brojeva. Zatim izraziti beskonačni aritmetički niz $n = (1,4,7,...,3k+1,...)$ preko elemenata ove baze. Koja je dimenzija ovog prostora?

47. Ispitati ortogonanost skupa vektora $\{(1,1,-1,-1),(1,-1,1,-1),(0,1,1,0),(1,0,0,1))\}$. Ako je ortogonalan, ortonormirati ga.

48. Dati su vektori $v_1 = (2,0,1)$, $v_2 = (4,1,-3)$, $v_3 = (-1,2,2)$. Ispitati ortogonalnost skupa $\{v_1,v_2,v_3\}$. Primenom Gramm-Schmidtovog postupka, formirati na osnovu njega ortogonalan skup vektora $\{u_1,u_2,u_3\}$. Zatim, dobijeni skup, ortonormirati.

49. (ispit - 18.04.2005.) Neka su data dva vektora $u_1 = (1,-1,1,-1)$ i $u_2 = (1,1,1,1,)$ u prostoru $\mathbb{R}^4$. Dopuniti ovaj skup do ortogonalne baze, a zatim normirati dobijenu bazu.

Domaći zadatak VI

DZ40. (ispit - 02.02.2006.) Dati su vektori $e_1 = (2, 1, -3)$, $e_2 = (3, 2, -5)$ i $e_3 = (1, -1, 1)$. Dokazati da oni čine jednu bazu u prostoru $\mathbb{R}^3$. Odrediti koordinate vektora $x = (6, 2, -7)$ u toj bazi.

DZ41. Pokazati da vektori $e_1 = (1, 1, 1, 1)$, $e_2 = (1, 1, 1, 2)$, $e_3 = (1, 1, 2, 3)$ i $e_4 = (1, 2, 3, 4)$ čine jednu bazu u prostoru $\mathbb{R}^4$. Zatim, naći koordinate vektora $x = (3, 6, 11, -2)$ u toj bazi. Koja je dimenzija ovog prostora?

DZ42. Pokazati da polinomi 1, $1 - t$, $2 - 2t + t^2$ i $1 + t + t^2 + t^3$ čine jednu bazu u prostoru $\mathcal{P}_3$. Zatim izraziti polinom $p(t) = 2+3t-t^2+2t^3$ preko elemenata te baze. Koja je dimenzija ovog prostora?

DZ43. Ispitati algebarsku strukturu $(\mathbb{R}^3, +)$.

DZ44. Ispitati algebarsku strukturu $(\mathcal{P}_3, +)$.

DZ45. Ispitati algebarsku strukturu $(\mathcal{X}, +)$.

DZ46. Dokazati da je skup $\mathcal{X}$, svih beskonačnih aritmetičkih nizova realnih brojeva linearan prostor. Pokazati da nizovi $e_1 = (1, 1, ..., 1, ...)$ i $e_2 = (0, 1, 2, ..., n, ...)$ čine jednu bazu u tom prostoru.

DZ47. (ispit - 04.02.2005.) Gramm-Schmidtovim postupkom ortogonalizacije naći ortonormiranu bazu koristeći bazu $u_1 = (2, 0, 2)$, $u_2 = (1, 2, 1)$, $u_3 = (0, 1, 2)$.

DZ48. (ispit - 26.09.2006.) Koristeći Gramm-Schmidtov postupak ortogonalizacije i skup linearno nezavisnih vektora $a = (1, 1, 1)$, $b = (1, 2, 3)$ i $c = (1, 1, 2)$, naći jednu ortonormiranu bazu.

DZ49. (ispit - 02.02.2006.) Koristeći Gramm-Schmidtov postupak ortogonalizacije i skup linearno nezavisnih vektora $a = (1, 1, 1)$, $b = (3, -1, -1)$ i $c = (-2, 0, 6)$, naći jednu ortonormiranu bazu.

DZ50. (ispit - 17.12.2005.) Dopuniti do ortogonalne baze prostora $\mathbb{R}^4$ sistem sastavljen od vektora $u_1 = (1, 1, 1, 1)$ i $u_2 = (-13, 5, 6, 2)$, a zatim naći odgovarajuću ortonormiranu bazu.

DZ51. (ispit - 26.11.2005.) Naći vektor koji dopunjuje skup vektora $\{(2, 1, 2),\ (1, 2, -2)\}$ do ortogonalne baze, a zatim naći ortonormiranu bazu.