

IV - Kompleksni brojevi.

Bitni pojmovi. *Algebarski oblik kompleksnog broja, realni deo, imaginarni deo, modul, argument, glavna vrednost argumenta, konjugovani broj, geometrijska interpretacija kompleksnog broja u kompleksnoj ravni, operacije sa kompleksnim brojevima (sabiranje, oduzimanje), trigonometrijski oblik kompleksnog broja, eksponencijalni oblik kompleksnog broja, operacije sa kompleksnim brojevima (množenje, deljenje, stepenovanje i korenovanje), geometrijska interpretacija n-tog korena, Moavrov obrazac (sa dokazom).*

20. Odrediti kompleksan broj $z = x + iy$, za koji važe uslovi $|z - 2 + i| = 5$ i $\operatorname{Re}(zi + z) = 2$.

21. Odrediti module i argumente sledećih kompleksnih brojeva

$$z_1 = 1 + i, \quad z_2 = -1 + i\sqrt{3}, \quad z_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad z_4 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_5 = 2i, \quad z_6 = -3i, \quad z_7 = -1,$$

i prevesti ih na trigonometrijski i Eulerov oblik. Zatim izračunati $z_1 + z_2$, $z_3 - z_4$, $z_1 z_3$ i z_2/z_4 .

22. Izračunati $z = (-1 + i\sqrt{3})^{10}$, a zatim odrediti $\operatorname{Re}(z)$, $\operatorname{Im}(z)$, $|z|$, $\arg(z)$ i $\operatorname{Arg}(z)$.

23. Izračunati $\left(\frac{\sqrt{3} + 5i}{4 + 2i\sqrt{3}}\right)^{66}$.

24. Izračunati $\sqrt[3]{-1 - i}$.

25. Rešiti jednačinu $z^6 + 2z^3 + 4 = 0$.

26. Rešiti jednačinu $8(1 + i)z^2 + 8(2 - i)z + (1 - 7i) = 0$.

27. Odrediti geometrijsko mesto tačaka u kompleksnoj ravni, za koje važi $|z - 2 + i| < 1$.

28. Proveriti da li važi $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{1 - z}\right) < \frac{1}{2} \Leftrightarrow |z| > 1$

29. Dokazati $(1 + \cos \theta + \sin \theta)^n = 2^n \cos^n \frac{\theta}{2} \left(\cos \frac{n\theta}{2} + i \sin \frac{n\theta}{2}\right)$.

30. Rešiti jednačinu $(z + i)^n - i(z - i)^n = 0$.

31. Rešiti jednačinu $(z + a)^n = z^n$.

Literatura: G. V. Milovanović, R. Ž. Đorđević: *Linearna Algebra*, Elek. fakultet, Niš (2005).

Domaći zadatak IV

DZ23. Izračunati $z = x + iy$, za koje je $|z| + z = 2 + i$.

DZ24. Izračunati $z = x + iy$, za koje je $\bar{z} + 4z = 20 + 18i$.

DZ25. Odrediti $\operatorname{Re}(z)$, $\operatorname{Im}(z)$, $|z|$ i $\arg(z)$ ako je

$$1^\circ z_1 = (1 + i\sqrt{3})^3, \quad 2^\circ z_2 = (1 - i\sqrt{3})^6, \quad 3^\circ z_3 = (1 + i)^{10}, \quad 4^\circ z_4 = \left(1 + \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)^6$$

DZ26. Izračunati $\sqrt[3]{\frac{1+i}{\sqrt{2}}}$.

DZ27. Rešiti jednačinu $z^2 - (3 - 2i)z + (5 - 5i) = 0$.

DZ28. Odrediti geometrijsko mesto tačaka u kompleksnoj ravni, za koje važi

$$1^\circ 2 < |z| < 3 \wedge \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}, \quad 2^\circ |z - a| < r \quad (a \in \mathbb{C}, r \in \mathbb{R}), \quad 3^\circ \operatorname{Re}(z + iz) = 0.$$

DZ29. Rešiti jednačine

$$1^\circ (z + i)^{13} = (z - i)^{13} \quad 2^\circ (z + 1)^5 + (z - 1)^5 = 0.$$