

**III - Podgrupe. Morfizmi.
Algebarske strukture sa dve operacije.**

Bitni pojmovi. Podgrupa, Homomorfizam, Izomorfizam, Distributivnost, Algebarske strukture sa dve operacije (Prsten, Telo, Polje).

17. Data je grupa (G, \circ) i jedan njen element $a \in G$. Dokazati da je skup elemenata iz G , koji su komutativni sa a podgrupa grupe G .
18. Date su grupe $(\mathbb{Z}, +)$ i (G, \circ) , gde je \mathbb{Z} skup celih brojeva, a $G = \{-1, 1\}$. Dato je i preslikavanje $f: \mathbb{Z} \mapsto G$, tako da je $f(2n) = 1$ i $f(2n + 1) = -1$, za $n \in \mathbb{Z}$. Dokazati da je preslikavanje f homomorfizam.
19. Ispitati strukturu (E, \oplus, \odot) , gde je $E = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$, a

$$(a_1, b_1) \oplus (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2),$$
$$(a_1, b_1) \odot (a_2, b_2) = (a_1 a_2, a_1 b_2 + b_1 a_2 + b_1 b_2).$$

Literatura: G. V. Milovanović, R. Ž. Đorđević: *Linearna Algebra*, Elek. fakultet, Niš (2005).

Domaći zadatak III

DZ15. Dokazati da su grupe (\mathbb{R}^+, \cdot) i $(\mathbb{R}, +)$ izomorfne.

DZ16. Ispitati strukturu $(\mathbb{R}^4, \oplus, *)$, gde je $\mathbb{R}^4 = \{(a, b, c, d) \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$, a

$$(a_1, b_1, c_1, d_1) \oplus (a_2, b_2, c_2, d_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2),$$
$$(a_1, b_1, c_1, d_1) * (a_2, b_2, c_2, d_2) = (a_1 a_2 + b_1 c_2, a_1 b_2 + b_1 d_2, c_1 a_2 + d_1 c_2, c_1 b_2 + d_1 d_2).$$

DZ17. Ispitati strukturu $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

DZ18. Neka je $S = \{a\}$. Ispitati strukturu $(S, +, \cdot)$, ako je $a + a = a$ i $a \cdot a = a$.

DZ19. Dokazati izomorfnost struktura $(S, +)$ i (S, \cdot) iz prethodnog zadatka.

DZ20. (24.11.2004.) Neka je $(G, *)$ grupa i neka je $g \in G$ jedan njen element. Na skupu G definišimo operaciju

$$a \cdot b = b * g * a, \quad \forall a, b \in G.$$

Ispitati strukturu (G, \cdot) .

DZ21. (18.03.2005.) Ispitati strukturu $(S, +, \cdot)$, pri čemu je $S = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$.

DZ22. Ispitati strukturu (\mathbb{R}, \odot) , gde je $a \odot b = a + b + ab$.