Zbornik radova XLVIII Konf za ETRAN, Čačak, 6-10 juna 2004, tom III
Proc. XLVIII ETRAN Conference, Čačak, June 6-10, 2004, Vol. III

ODREĐIVANJE NAJKRAĆIH PUTEVA U GRAFU NA REGULARNOM BIDIREKCIONOM LINEARNOM SISTOLIČKOM POLJU

Emina I. Milovanović, *Elektronski fakultet, Niš, A. Medvedeva 14, 18000 Niš, P.O. Box 73, Srbija*
Michael P. Bekakos, *Democritus University of Thrace, 12, Vass. Sofias str. Xanthi 67100, Hellas*
Igor Ž. Milovanović, Branislav M. Ranđelović, Natalija M. Stojanović,
Elektronski fakultet, Niš, A. Medvedeva 14, 18000 Niš, P.O. Box 73, Srbija

Sadržaj *- U radu je predloženo regularno bidirekciono linearno sistoličko polje sa dvodimenzionalnim I/O-vezama, pogodno za nalaženje najkraćih puteva u datom grafu. Dat je odgovarajući sistolički algoritam i eksplicitne formule za sintezu predloženog polja. Formule obezbeđuju da sistoličko polje bude prostorno optimalno, u odnosu na obim problema, a da je vremenska komponenta maksimalno minimizirana u odnosu na broj procesnih elemenata u polju.*

1. UVOD

Cilj ovog rada je da prikaže kako se problem nalaženja najkraćih puteva u grafu može realizovati na regularnom linearnom bidirekcionom sistoličkom polju sa dvodimenzionalnim I/O-vezama (RBLSA). Problem nalaženja najkraćeg puta u grafu smo izabrali zbog njegove univerzalnosti. Naime, veliki broj problema iz različitih naučnih i tehničkih disciplina se svodi na ovaj problem (videti [1]). Razlog za izbor RBLS leži u nizu njegovih dobrih osobina, koja u poređenju sa drugim jednodimenzionalnaim (1D) sistoličkim poljima (SA) ono poseduje. To su, na primer, veliki stepen iskorišćenosti osobine protočnosti po podacima u toku realizacije odgovarajućeg algoritma, pogodnost za organizovanje izračunavanja sa mogućnostima detekcije i korekcije jednostrukih grešaka, kao i mogućnost implementacije velikog broja, međusobno različitih problema na polju ovog tipa (videti [2-4]).

Problem nalaženja najkraćeg puta u grafu, kao i odgovarajući matematički model, sa geometrijskog stanovišta je trodimenzionalan. Takav problem je pogodan za implementaciju na dvodimenzionalnom (2D) SA i na linearnom (1D) SA sa jednodimenzionalnim I/O-vezama. Takav pristup je u literaturi već prilično zastupljen i u velikoj meri obrađen (videti [5-9]).

Kada su u pitanju RBLSA, to nije slučaj. U ovom radu smo pokazali da je rešavanje pomenutog problema na RBLSA moguće i povrh svega veoma efikasno. Eksplicitne formule za sintezu jednog takvog RBLSA su takođe date. Sintetizovano polje ima minimalan broj procesnih elemenata (PE), u odnosu na obim posmatranog problema, a vreme realizacije posmatranog sistoličkog algoritma je minimizirano u odnosu na dobijeni broj PE.

2. MATEMATIČKI MODEL

Neka je $G=(V,E)$ dati orijentisani ili neorijentisani graf, definisan skupom čvorova $V=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ i skupom grana $E=\{e_1,e_2,\dots,e_m\}$. Grafu G je pridružena težinska matrica $D^{(0)}=(d_{ij}^{(0)})$, reda $n\times n$, pri čemu $d_{ij}^{(0)}$ predstavlja dužinu grane koja vodi od čvora x_i u čvor x_j, $i=1,2,\dots,n$, $j=1,2,\dots,n$. Pri tome je $d_{ii}^{(0)}=0$ i $d_{ij}^{(0)}=+\infty$ ako ne postoji grana iz skupa E koja vodi iz čvora x_i u čvor x_j. Nalaženje najkraćih puteva u datom grafu, svodi se na generisanje elemenata matrice $D^{(n)}=(d_{ij}^{(n)})$, pomoću rekurentnog postupka

$$d_{ij}^{(k)}=\min(d_{ij}^{(k-1)},d_{ik}^{(k-1)}+d_{kj}^{(k-1)}) \tag{1}$$

za svako $i=1,2,\dots,n$, $j=1,2,\dots,n$ i $k=1,2,\dots,n$, pri čemu su elementi matrice $D^{(0)}=(d_{ij}^{(0)})$ inicijalne vrednosti. Element $d_{ij}^{(n)}$ u matrici $D^{(n)}$ predstavlja dužinu najkraćeg puta koji vodi iz čvora x_i u čvor x_j.

Kako je već rečeno, izračunavanja (1) su, geometrijski gledano, trodimenzionalna, tj. mogu da se prikažu u (i,j,k)-ortogonalnom koordinatnom sistemu. Samim tim, nisu pogodna za direktan proces sinteze RBLSA. Ideja za prevazilaženje ovog problema je sledeća. Na osnovu izračunavanja (1) moramo formirati određeni broj celina (skupina izračunavanja), koje će po obimu i složenosti izračunavanja biti međusobno jednake, a po geometrijskom karakteru dvodimenzionalne. Na osnovu jedne, bilo koje od njih, biće sintetizovano RBLSA, na kome će se, sukcesivnim realizacijama dobijenih celina, dobiti traženi rezultat, tj. elementi matrice $D^{(n)}=(d_{ij}^{(n)})$.

Prirodno se nameće očekivanje da se pomenute celine mogu dobiti fiksiranjem jedne od indeksnih promenljivih. Međutim, zavisnost izračunavanja po podacima u (1) onemogućava da se to obavi fiksiranjem indeksnih promenljivih i i j, što je u suprotnosti sa očekivanjem. Preostaje indeksna promenljiva k, ali ona je ujedno i iterativna indeksna promenljiva, a nije uobičajeno da se celine formiraju cepanjem takve indeksne promenljive. Tu verovatno leži razlog što se u procesu sinteze SA za rešavanje posmatranog problema nije krenulo ovim putem. Ipak, pokazaće se da je on jedini ispravan. Na osnovu (1) formiraćemo celine $D^{(1)}$, $D^{(2)}$, … $D^{(n)}$. Dovoljno je sintetizovati RBLSA za nalaženje elemenata matrice $D^{(1)}$, a traženi rezultat dobijamo nakon n sukcesivnih izračunavanja, tj. nakon redom nalaženja elemenata matrica $D^{(1)}$, $D^{(2)}$, … $D^{(n)}$. U svakom ciklusu izračunavanja elementi matrice $D^{(k)}$ su inicijalne vrednosti za izračunavanje elemenata matrice $D^{(k+1)}$, za svako $k=0,1,\dots,n-1$.

3. SISTOLIČKI ALGORITAM I FORMULE ZA SINTEZU RBLSA

Razmotrićemo sada izračunavanje elemenata matrice $D^{(1)} = (d_{ij}^{(1)})$, tj. matematički model (1) za $k = 1$. Radi bolje preglednosti sistoličkog algoritma uvešćemo oznake

$$d_{i1}^{(0)} \equiv a(i,0,1), d_{1j}^{(0)} \equiv b(0,j,1), d_{ij}^{(0)} \equiv c(i,j,0), \quad (2)$$
$$d_{ij}^{(1)} \equiv c(i,j,1),$$

za svako $i = 1,2,\ldots,n$ i $j = 1,2,\ldots,n$. Sada željeni matematički model (1) dobija formu

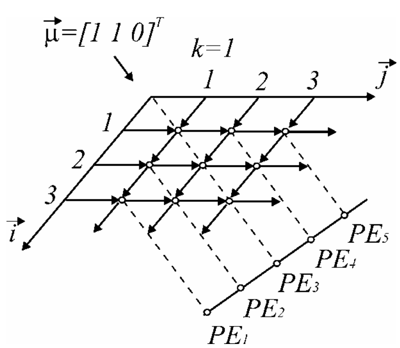
$$c(i,j,1) = \min(c(i,j,0), a(i,0,1) + b(0,j,1)) \quad (3)$$

za svako $i = 1,2,\ldots,n$ i $j = 1,2,\ldots,n$. Ovom modelu možemo pridružiti sledeći sistolički algoritam:

Algoritam_1
for $j := 1$ to n do
  for $i := 1$ to n do
    $a(i,j,1) := a(i,j-1,1)$
    $b(i,j,1) := b(i-1,j,1)$
    $c(i,j,1) := \min(c(i,j,0), a(i,j,1) + b(i,j,1))$

Ovom algoritmu u (i,j,k)-ortogonalnom koordinatnom sistemu odgovara rešetkast usmeren graf, čiji su čvorovi definisani skupom tačaka $\{(i,j,1) \mid 1 \le i \le n, 1 \le j \le n\}$. Susedni čvorovi u ovom grafu spojeni su usmerenom granom u pravcu vektora $\vec{e}_a^{\,3} = [0\,1\,0]^T$ i $\vec{e}_b^{\,3} = [1\,0\,0]^T$.

Za slucaj $n = 3$ graf je prikazan na Slici 1. Analizom, sličnom kao što je sprovedena u radu [10], za slučaj proizvoda matrice i vektora, dolazimo do zaključka da za ovaj model, tj. za Algoritam_1, jedini pravac projektovanja pri sintezi RBLSA moze biti $\vec{\mu} = [1\,1\,0]^T$.



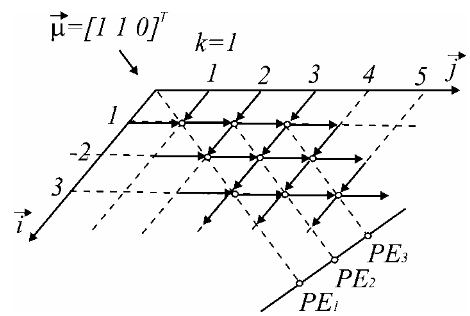
Slika 1. *Graf za slučaj* $n = 3$

U cilju minimizacije prostorne komponente, tj. broja PE u SA, prilagodićemo Algoritam_1 po nekoj od indeksnih promenljivih i ili j (ovaj algoritam pruža tu mogućnost, videti [11]). Izračunavanja u (3) ne zavise od redosleda po kome indeksne promenljive i ili j uzimaju vrednosti iz skupa $\{1,2,\ldots,n\}$, tj. izračunavanja se mogu obaviti po bilo kojoj permutaciji brojeva iz ovog skupa. To znaci (videti [12]) da se Algoritam_1 može prilagoditi po bilo kojoj od ove dve indeksne promenljive. Zbog ravnopravnosti indeksnih promenljivih, u daljem tekstu cemo prilagođavanje algoritma vršiti samo po jednoj od njih, a to je indeksna promenljiva i.

Sistolički algoritam, koji se dobija prilagođavanjem Algoritma_1 pravcu projektovanja $\vec{\mu} = [1\,1\,0]^T$ po indeksnoj promenljivoj i ima sledeci oblik:

Algoritam_2
for $j := 1$ to n do
  for $i := 1$ to n do
    $a(i,i+j-1,1) := a(i,i+j-2,1)$
    $b(i,i+j-1,1) := b(i-1,i+j-1,1)$
    $c(i,i+j-1,1) := \min(c(i,i+j-1,0),$
        $a(i,i+j-1,1) + b(i,i+j-1,1))$

gde je $a(i,j+n,1) \equiv a(i,j,1) \equiv a(i,0,1)$, $b(0,j+n,1) \equiv b(0,j,1)$, $c(i,j+n,0) \equiv c(i,j,0)$, $c(i,j+n,1) \equiv c(i,j,1)$ za svako $i = 1,2,\ldots,n$ i $j = 1,2,\ldots,n$. Na Slici 2 je prikazan usmeren rešetkast graf, koji odgovara Algoritmu_2, za slučaj $n = 3$. Na ovoj slici, za razliku od Slike 1, jasno se vidi prilagođenost grafa pravcu projektovanja $\vec{\mu} = [1\,1\,0]^T$. To se uočava na osnovu projekcija čvorova ovih grafova u pravcu $\vec{\mu} = [1\,1\,0]^T$.



Slika 2. *Graf za slučaj* $n = 3$

Postupak sinteze SA, koji je sproveden je na način kao što je to urađeno za slične probleme u [12-13], zbog obimnosti nije detaljno izložen. U nastavku su date dobijene eksplicitne formule za sintezu SA u odgovarajućem ortogonalnom koordinatnom sistemu.

Označimo sa $PE \to [x\ y]^T$ pozicije PE u RBLSA, a inicijalne pozicije odgovarajućih elemenata na početku realizacije algoritma označimo sa $a(i,0,1) \to [x\ y]_a^T$, $b(0,i+j-1,1) \to [x\ y]_b^T$ i $c(i,i+j-1,0) \to [x\ y]_c^T$. Tada važe jednakosti:

$$PE \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j-1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad (4)$$

$$a(i,0,1) \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_a = \begin{bmatrix} 1-2i \\ 1 \end{bmatrix} + (r_1 + r_2)\,\overline{n} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$b(0,i+j-1,1) \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_b = \begin{bmatrix} 2i+2j-3 \\ 1 \end{bmatrix} + (r_1 + r_2)\,\overline{n} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$c(i,i+j-1,0) \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_c = \begin{bmatrix} j-1 \\ 3-2i-j \end{bmatrix} + (r_1 + r_2)\,\overline{n} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

za svako $i = 1,2,\dots,n$ i $j = 1,2,\dots,n$. Pri tome, važe smene (2), kao i periodičnost elemenata definisana u Algoritmu_2. Veze u RBLSA između susednih PE ostvaruju se u smeru vektora $\vec{e}_a^{\,2} = [1\;0]^T$ i $\vec{e}_b^{\,2} = [-1\;0]^T$, dok se inicijalne vrednosti $c(i,i+j-1,0)$ kao i izlazne vrednosti $c(i,i+j-1,1)$ kreću u smeru vektora $[0\;1]^T$.

Parametri r_1, r_2 i $\overline{n}$ doprinose da se (kao u radu [13]) minimizira vreme realizacije algoritma, u odnosu na broj PE. Tako je

$$\overline{n} = \begin{cases} n, & n = 2l+1, \\ n+1, & n = 2l. \end{cases}$$

Svakom indeksnom paru (i,j) pridružuje se par (r_1, r_2), gde je r_1 određeno pomoću (5), a r_2 najveći broj iz skupa $\{0,1\}$, takav da važi

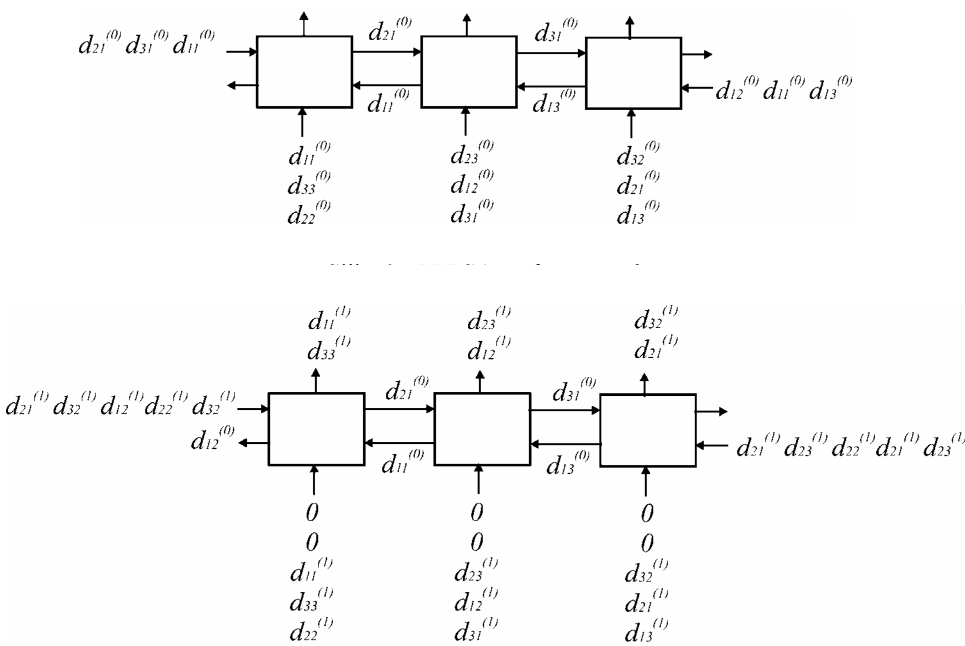
$$-2(i-1) + (j-1) + (r_1 + r_2)\overline{n} \le 0 .$$

Primer jednog, na ovaj način dobijenog, RBLSA za slučaj $n = 3$, prikazan je na Slici 3.

4. ANALIZA DOBIJENOG REZULTATA

Na osnovu (4) je lako izračunati da se dobijeno RBLSA sastoji od $\Omega = n$ PE. Obzirom na obim posmatranog problema n^2 ($i = 1,2,\dots,n$, $j = 1,2,\dots,n$), ovo polje je prostorno optimalno.

Ako uzmemo da je normalizovana vremenska jedinica, tj. trajanje takta, vreme za koje se u PE obavi operacija sabiranja skalara $a+b$ i jedne operacije komparacije dva skalara $\min\{c,a\}$, tada je vreme inicijalizacije, prilikom realizacije algoritma na predloženom RBLSA $t_{in} = n-1$, aktivno vreme realizacije $t_{exe} = \overline{n}$, i izlazno vreme $t_{out} = n-1$. Vreme inicijalizacije, prilikom izračunavanja elemenata matrice $D^{(k)}$ preklapa se sa izlaznim vremenom izračunavanja matrice $D^{(k-1)}$, za svako $k = 2,3,\dots,n$, što je za slučaj $n = 3$ prikazano na Slici 4. Tako je ukupno vreme za nalaženje



Slika 4. *Preklapanje izlaznog vremena za elemente matrice* $D^{(1)}$ *i ulaznog vremena za elemente matrice* $D^{(2)}$

Sa r_1 označićemo najveći broj iz skupa $\{0,1\}$, koji se pridružuje indeksnoj promenljivoj i, $i = 1,2,\dots,n$, takav da je

$$-2(i-1) + r_1\overline{n} < 0, \quad i = 1 \Rightarrow r_1 = 0 . \qquad (5)$$

matrice $D^{(n)}$, na osnovu (1),

$$t_{tot} = n(n + \overline{n}) - 1 .$$

Efikasnost ovog izračunavanja je

$$E = \frac{n^3}{n(n(n+\overline{n})-1)} \approx \frac{1}{2},$$
sto se može smatrati za dobar rezultat.

5. ZAKLJUČAK

U radu je predloženo regularno bidirekciono linearno sistoličko polje sa dvodimenzionalnim I/O-vezama. Dat je sistolički algoritam, na osnovu koga je sintetizovano SA, za pravac projektovanja $\vec{\mu} = [1\,1\,0]^T$. Zbog ograničenog prostora, izostavljen je sam proces sinteze, ali su date eksplicitne formule za sintezu. Predloženo polje je prostorno optimalno, tj. ima minimalan broj PE u odnosu na obim problema. Vreme realizacije datog problema na ovom polju je minimizirano u odnosu na broj PE. Dat je jedan primer RBLSA za slučaj $n = 3$.

LITERATURA

[1] A.V.Aho, J.E.Hopcroft, J.D.Ullman*, Design and Analysis of Computer Algorithms*, Reading, MA: Addison-Wesley, 1975.

[2] S.Y.Kung,, *VLSI Processor Arrays*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1988.

[3] E.I.Milovanović, I.Ž.Milovanović, B.M.Ranđelović, M. K.Stojčev, "Systolic Implementation of Nonlinear Transformation"*,* in *Proc. International Conference on Telecomunications in Modern Satellite, Cable and Broadcasting Services, TELSIKS'03 (B.Millovanović, ed.), Vol.2*, Niš, 2003, 592-595.

[4] E.I.Milovanović, M.B.Tošić, I.Ž.Milovanović, I.Z. Milentijević, "Designing Processor-Time Optimal Linear Systolic Arrays for Matrix-Vector Multiplication", *J.Electrotechn.Math., Vol.3,* 1(1998), pp. 7-19.

[5] S.Y.Kung, S.C.Lo, P.S.Lewis, "Optimal Systolic Design for Transitive Cloure and Shortest Path Problem", *IEEE Trans. Comput. Vol.36,* 5(1987), pp. 603-614.

[6] G.Rote, "A Systolic Array for Algebraic Path Problem", *Computing Vol.34,* 3(1985,) pp. 191-219.

[7] P.Y.Chang, J.C.Tsay, "A Family of Efficient Regular Arrays for Algebraic Path Problem", *IEEE Trans. Comput. Vol.43,* 7(1994,) pp. 769-777.

[8] B.Louka, M.Tchuente, "Dynamic Programming on Two-Dimensional Systolic Arrays", *Inform. Proc. Letters,* 29(1988,) pp. 97-104.

[9] B.W.Wah, G.J.Li, "Systolic Processing for Dynamic Programming Problems", *Circuits System Signal Process Vol.7,* 2(1988,) pp. 119-149.

[10] I.Ž. Milovanović, E.I. Milovanović, I.Z.Milentijević, M.K.Stojčev, "Designing of Processor-Time Optimal Systolic Arrays for Band Matrix-Vector Multiplication", *Comput. Math. Appl., Vol.32,* 2(1996), pp. 21-31.

[11] I.Ž.Milovanović, E.I.Milovanović, M.K.Stojčev, T.I. Tokić, N.M.Stojanović, "Determing Space Parameters in Systolic Array Design", *Filomat,* 15(2001), pp. 55-60.

[12] T.I.Tokić, I.Ž.Milovanović, D.M.Ranđelović, E.I. Milovanović, "Determing VLSI Array Size for One Class of Nested Loop Algorithms", *Advances in Computer and Information Sciences, (V.Gudukbay, T.Dagar, A.Gursay, E.Gelembe, eds.), Antalia'98, Amsterdam:IOS Press. Concurent Syst.Eng.Ser.* 53(1998), pp. 389-396.

[13] M.P.Bekakos, I.Ž.Milovanović, E.I.Milovanović, T.I. Tokić, M.K.Stojčev, "Hexagonal Systolic Arrays for Matrix Multiplications", *Ser. Advances in High Performance Computing, (M.P.Bekakos, ed.), Vol.5, Wit Press, Southampton-Boston, UK,* (2001), pp. 175-209.

Abstract*. In this paper we consider a regular bidirectional linear systolic array with twodimensional I/O-links, suitable for computing shortest paths in a given graph. The systolic algorithm and explicite formulas for sinhtesys of RBLSA are given. Obtained array is space-optimal, respecting to the measure of the problem. Its time-component is minimized, respecting to the number of process elements in the array.*

COMPUTING SHORTEST PATHS ON REGULAR BIDIRECTIONAL LINEAR SYSTOLIC ARRAY

Emina I. Milovanović, Michael P. Bekakos,
Igor Ž. Milovanović, Branislav M. Ranđelović,
Natalija M. Stojanović